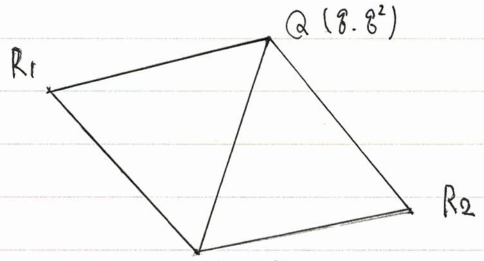
2004年　東大数学　文系第1問　理系第1問 ①

Point
座標上で図形(角度)を扱う場合、
- tan の加法定理
- ベクトルの内積
- 図形的な考察
- 複素数平面(数III)

などのアプローチ。

解法1　: tanの加法定理

$P(p, p^2)$　$Q(q, q^2)$　$R(r, r^2)$ とする。(但し、$p<q$)
このように座標を設定しても一般性を失わない。



上図のように、Rの場所は2通り考えられるが、
まず R_1 の場所にあるものを考える。

- PQの傾きは $\dfrac{q^2-p^2}{q-p}=q+p$ なので、$p+q=\sqrt{2}$ …①

傾き$\sqrt{2}$

- $PQ=a$ より $PQ^2=a^2$ なので、

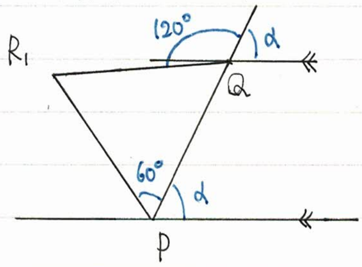
$$(p-q)^2+(p^2-q^2)^2=a^2$$
$$(p-q)^2\{1+(p+q)^2\}=a^2 \quad \cdots ②$$

辺の長さ a の条件

- R_1 は Pを中心にQを60°回転させた点である。

今回は、解法1. tanの加法定理
解法2. 複素数平面
解法3. 方向ベクトル(おまけ)
を紹介。

直線PQがx軸の正方向となす角をαとすると、
$\tan\alpha=\sqrt{2}$.



同様に、直線PR_1は
$\alpha+60°$
直線QR_1は
$\alpha+120°$ である。

①と同様に、PR_1の傾きは $p+r$、
QR_1の傾きは $q+r$ なので、

$$p+r=\tan(\alpha+60°)$$
$$=\frac{\tan\alpha+\tan 60°}{1-\tan\alpha\cdot\tan 60°}=\cdots=\frac{-4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{5}$$

$$q+r=\tan(\alpha+120°)$$
$$=\frac{\tan\alpha+\tan 120°}{1-\tan\alpha\tan 120°}=\cdots=\frac{-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5}$$

辺々差をとって、
$$p-q=-\frac{6\sqrt{3}}{5} \quad ③$$
②に代入しやすい

②に①と③を代入して、
$$\left(-\frac{6\sqrt{3}}{5}\right)^2\{1+(\sqrt{2})^2\}=a^2 \qquad \therefore\ a=\frac{18}{5}$$

R_2の場合も同様に、
$$p+r=\tan(\alpha-60°)$$
$$q+r=\tan(\alpha-120°)$$ となるが、

$\tan(\alpha-60°)=\tan(\alpha+120°)$
$\tan(\alpha-120°)=\tan(\alpha+60°)$
を利用すると楽

$p-q=\frac{6\sqrt{3}}{5}$ となり、②に代入すると、$a=\frac{18}{5}$ が得られる

よって、$a=\dfrac{18}{5}$ //

2004年　東大数学　文系第1問　理系第1問②

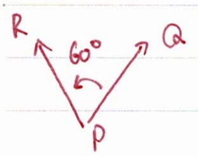
解法2：複素数平面

点Rは、点Pを中心に点Qを回転させた点なので、　tanの加法定理の代わりに回転条件として利用

$$(r-p)+i(r^2-p^2)=\{(q-p)+i(q^2-p^2)\}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=(q-p)(1+i(q+p))\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\frac{q-p}{2}\{1-\sqrt{3}(q+p)+(\sqrt{3}+p+q)i\}$$



複素数の相等から、

$$r-p=\frac{q-p}{2}\{1-\sqrt{3}(p+q)\}$$

$$r^2-p^2=\frac{q-p}{2}(\sqrt{3}+p+q)$$

↓ 割る

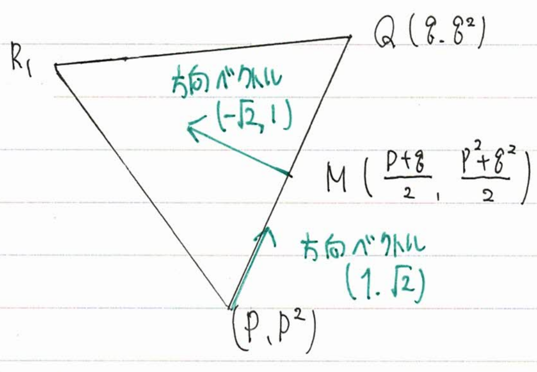
$$\frac{r^2-p^2}{r-p}=\frac{\sqrt{3}+p+q}{1-\sqrt{3}(p+q)}$$

（計算すると）

$$p+r=\frac{-4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{5}$$ ← 解法1と同じ結果

以下、同様に、$q+r$を計算する。（略）

解法3：方向ベクトル



上図のように、
点$M\left(\frac{p+q}{2}, \frac{p^2+q^2}{2}\right)$をおく。
PQの方向ベクトルが$(1, \sqrt{2})$なので、
MR_1の方向ベクトルは$(-\sqrt{2}, 1)$である。

$\vec{n}=(-\sqrt{2}, 1)$とすると、$|\vec{n}|=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$
なので、$\vec{n}$と同じ方向の単位ベクトルは、$\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}, 1)$

△PQRの1辺はaなので、MR_1の長さは$\frac{\sqrt{3}}{2}a$
よって、

$$\overrightarrow{MR_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}, 1)=\frac{a}{2}(-\sqrt{2}, 1)$$ である。

また、$M\left(\frac{p+q}{2}, \frac{p^2+q^2}{2}\right)$、$R_1(r, r^2)$なので、
$\overrightarrow{MR_1}=\left(r-\frac{p+q}{2}, r^2-\frac{p^2+q^2}{2}\right)$とも表せるので、

$\overrightarrow{MR_1}$を2通りで表す

$$\begin{cases} r-\dfrac{p+q}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a & \cdots ④ \\ r^2-\dfrac{p^2+q^2}{2}=\dfrac{1}{2}a & \cdots ⑤ \end{cases}$$

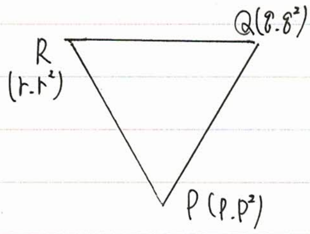
①②④⑤の連立を解くと、$a=\frac{18}{5}$

※R_2の場合は、$\overrightarrow{MR_2}=-(-\sqrt{2}, 1)=(\sqrt{2}, -1)$として計算

2004年　東大 数学　文系第1問　理系第1問 (3)

解法4：ベクトルの内積

補
tan の加法定理にくらべ、ベクトルの内積は計算量が多くなる。
その代わり、R_1 と R_2 の場合分けは不要。
メリットとデメリットを比較して方針を選ぼう。



・PQの傾きが $\sqrt{2}$ から
$$p+q=\sqrt{2} \quad \cdots ①$$
・PQ = a より
$$\sqrt{(p-q)^2+(p^2-q^2)^2}=a$$
$$\therefore \ |p-q|\sqrt{1+(p+q)^2}=a \quad \cdots ②$$
pとqの大小を決めてない。
①を代入して $\sqrt{3}|p-q|=a$ でも可

・PR = a より（②と同様に）
$$|p-r|\sqrt{1+(p+r)^2}=a \quad \cdots ③$$

・$\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{PR}||\overrightarrow{PQ}|\cos 60^\circ$ より　← 回転条件（tanの代わり）
$$(r-p)(q-p)+(r^2-p^2)(q^2-p^2)$$
$$=\sqrt{(r-p)^2+(r^2-p^2)^2}\sqrt{(q-p)^2+(q^2-p^2)^2}\times\frac{1}{2} \quad \cdots ④$$

①～④の連立方程式を解けばよい。
しかし、計算がメチャ大変。
オススメしません。

④に①を代入して（とても頑張り）整理すると、
$$5(p+r)^2+8\sqrt{2}(p+r)+1=0$$
$$\therefore \ p+r=\frac{-4\sqrt{2}\pm3\sqrt{3}}{5} \quad \cdots ⑤$$
$$\sqrt{1+(p+r)^2}=(\text{頑張る})=\frac{6\sqrt{2}\mp2\sqrt{3}}{5} \quad \cdots ⑥$$

ここまでで、
$$p+q=\sqrt{2} \quad \cdots ①$$
②に①を代入して　$\sqrt{3}|p-q|=a$
③に⑥を代入して　$|p-r|\dfrac{6\sqrt{2}\mp2\sqrt{3}}{5}=a$
⑤より　$p+r=\dfrac{-4\sqrt{2}\pm3\sqrt{3}}{5}$
の連立方程式（4文字、4式）

p、qの大小関係を決め、
p、rの　〃　…　と進めて、$a=\dfrac{18}{5}$